අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගය - 2021(2022)

07 - ගණිතය I

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

I පත්‍රය

A කොටස	=	10×25	=	250
B කොටස	=	05×150	=	750

එකතුව $= \frac{1000}{10}$

අවසාන ලකුණු = **100**

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.
2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න.

   ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.
3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.
4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමඟ □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) .... √ △ $\frac{4}{5}$

....

....

(ii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(iii) .... √ △ $\frac{3}{5}$

....

....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = □ $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.
2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි

ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණ ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

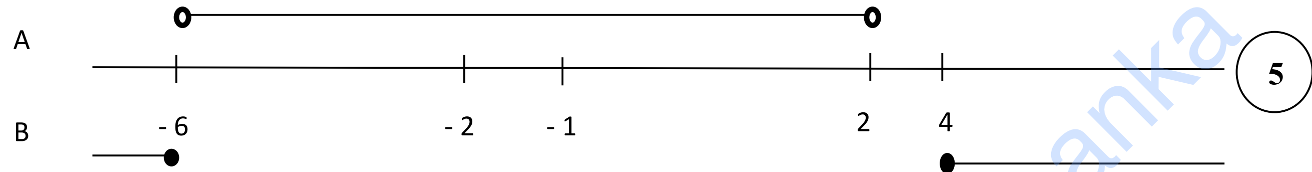
ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

A කොටස

$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 4\}$ හා $B = \{x \in \mathbb{R} : |x+1| \geq 5\}$ යැයි ගනිමු. $A \cap B, A \cap B'$ හා $A' \cup B$ සොයන්න.



$A \cap B = \emptyset$ (5)

$A \cap B' = \{x \in \mathbb{R} : -6 < x < 2\}$ (5)

$A' \cup B = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq -6\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x < \infty\}$ (10)

25

---

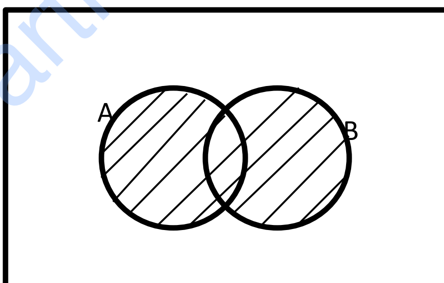
2. A හා B යනු S සර්වත්‍ර කුලකයක උපකුලක යැයි ගනිමු. $A \cup (A \cup B')' = A \cup B$ බව පෙන්වන්න. $A \cup B$ හා $(A \cup B')'$ කුලක වෙන් සටහන් දෙකක වෙන වෙනම නිරූපණය කරන්න.

$A \cup (A \cup B')' = A \cup (A' \cap B)$ [ද මෝගන් නියමය] (5)

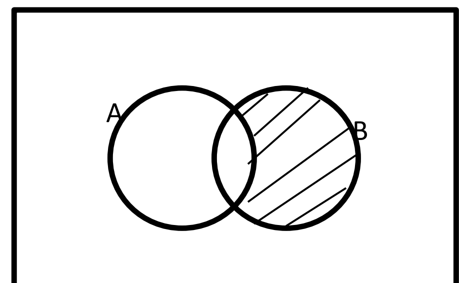
$= (A \cup A') \cap (A \cup B)$ [විඝටන නියමය] (5)

$= S \cap (A \cup B)$

$= A \cup B$ (5)



$A \cup B$ (5)



$(A \cup B')'$ (5)

25

---

3. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ යන සංයුක්ත ප්‍රස්තුතය හා $(\sim p \vee q) \vee r$ යන සංයුක්ත ප්‍රස්තුතය තර්කානුසාරීව තුල්‍ය බව පෙන්වන්න.

p	q	r	$p\wedge \sim q$	$(p\wedge \sim q) \Rightarrow r$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \vee r$
T	T	T	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
T	F	T	T	T	F	T
T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	F	F	F	T	T	T
			5	5	5	5

5 වන හා 7 වන තීරුවල සත්‍යතා අගයන් එකම වේ. (5)

$\therefore (p\wedge\sim q) \Rightarrow r$ හා $(\sim p\vee q)\vee r$ තර්කානුසාරීව තුල්‍ය වේ.

25

---

4. $m, n \in \mathbb{Z}$ යැයි ගනිමු. විසංවාද ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $m(n^2 + 2n)$ ඔත්තේ වේ නම්, m හා n යන දෙකම ඔත්තේ වන බව සාධනය කරන්න.

$m, n \in \mathbb{Z}$ යැයි ගනිමු.

$m(n^2 + 2n)$ ඔත්තේ යැයි ද m හෝ n ඔත්තේ නොවේ යැයි ද උපකල්පනය කරමු. (5)

$\therefore m$ හෝ n ඉරට්ටේ වේ.

<u>**(i)** අවස්ථාව</u> m ඉරට්ටේ වේ.

එවිට $m(n^2 + 2n)$ ඉරට්ටේ වේ. (5)

<u>**(ii)** අවස්ථාව</u> n ඉරට්ටේ වේ.

එවිට $n = 2k$, මෙහි $k \in \mathbb{Z}$. (5)

දැන්,
$$m(n^2 + 2n) = m(4k^2 + 4k)$$
$$= 2\underbrace{m(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{Z}}$$ (5)

$\therefore m(n^2 + 2n)$ ඉරට්ටේ වේ.

අවස්ථා දෙකේදී ම අපට විසංවාදයක් ලැබේ.

$\therefore m(n^2 + 2n)$ ඔත්තේ නම් m හා n දෙකම ඔත්තේ වේ. (5)

25

---

5. පාදය වෙනස් කිරීමේ සූත්‍රය භාවිත කර, $\log_{x^2} 4 = \frac{1}{2}\log_x 4$ බව පෙන්වන්න. **ඒ නයින්,** x සඳහා $\log_x 4 + \log_{x^2} 4 = 3$ සමීකරණය විසඳන්න.

$$\log_{x^2} 4 = \frac{\log_x 4}{\log_x x^2} \quad (5)$$

$$= \frac{\log_x 4}{2\log_x x}$$

$$= \frac{1}{2}\log_x 4 \quad ; \quad (5) \because \log_x x = 1$$

දැන්,

$$\log_x 4 + \log_{x^2} 4 = 3$$

$$\Longrightarrow \log_x 4 + \frac{1}{2}\log_x 4 = 3 \quad (5)$$

$$\Longrightarrow 2\log_x 4 + \log_x 4 = 6$$

$$\Longrightarrow 3\log_x 4 = 6$$

$$\Longrightarrow \log_x 4 = 2 \quad (5)$$

$$\Longrightarrow x^2 = 4$$

$$\Longrightarrow x = \sqrt{4} \ (\because x > 0) \quad (5)$$

($x = 2$ දී, ඇති සමීකරණය තෘප්ත කරයි.)

25

---

6. $\dfrac{x-6}{2-x} \leq x$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

$$\frac{x-6}{2-x} \leq x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-6-2x+x^2}{2-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x-6}{2-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(2-x)} \leq 0$$ (5)

	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x < \infty$
Sign of $\dfrac{(x-3)(x+2)}{(2-x)}$	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$

(15)

↓ $= 0$ ↓ අර්ථ නොදැක්වේ ↓ $= 0$

∴ විසඳුම්

$-2 \leq x \leq 2$ or $x \geq 3$. මගින් දෙනු ලැබේ. (5)

විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$

$= [-2, 2) \cup [3, \infty)$.

25

---

7. $f(x)=2(x-2)^2+3$ හි ප්‍රස්තාරය රූපසටහනෙහි දැක්වේ. a හා b හි අගයන් ද f හි පරාසය ද ලියා දක්වන්න. $x \leq k$ සඳහා f ට ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතයක් පවතින පරිදි k හි විශාලතම අගය ප්‍රකාශ කරන්න. k හි මෙම අගය සඳහා $f^{-1}(x)$ සොයන්න.

$$f(x) = 2(x-2)^2 + 3$$

$a = 2$ හා $b = 3$. **5**

f $y \geq 3$ මගින් දෙනු ලබයි.

k හි විශාලතම අගය $= 2$ **5**

ප්‍රතිලෝමය සඳහා $y = 2(x-2)^2 + 3$ ලෙස ලියා x හා y හුවමාරු කරමු :

$x = 2(y-2)^2 + 3$; මෙහි $x \geq 3$ හා $y \leq 2$. **5**

මෙයින් $(y-2)^2 = \frac{x-3}{2}$ ලැබෙන අතර,

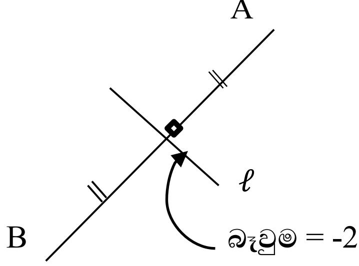
$$y - 2 = \pm\sqrt{\frac{x-3}{2}}.$$ **5**

$$\therefore y = -\sqrt{\frac{x-3}{2}} + 2 \quad (y \leq 2 \text{ බැවින්}).$$

$$\therefore f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-3}{2}} + 2.$$ **5**

25

8. $A \equiv (3,6)$ හා $B \equiv (-5,2)$ යැයි ගනිමු. AB හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වන l හි සමීකරණය සොයන්න. මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට ඇති දුර ඒකක 1 ක් වන පරිදි l මත වූ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක සොයන්න.



$P \equiv \left(\frac{-5+3}{2}, \frac{2+6}{2}\right)$

$P \equiv (-1,4)$ (5)

ℓ හි සමීකරණය:

$\frac{y-4}{x+1} = -2$

$\therefore y = -2x + 2$ (5)

$C \equiv (\alpha, \beta)$ එවැනි ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ගනිමු. එවිට $\beta = -2\alpha + 2$. (5)

$oc^2 = 1$, බැවින්

$(\alpha - 0)^2 + (\beta - 0)^2 = 1$. (5)

$\therefore \alpha^2 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 = 1$ ((1))

මෙයින් $5\alpha^2 - 8\alpha + 3 = 0$ ලැබෙන අතර, එනයින්,

$(5\alpha - 3)(\alpha - 1) = 0$.

$\therefore \alpha = \frac{3}{5}$ හෝ $\alpha = 1$. (5)

25

---

9. ගෝලාකාර බැලූනයක් ප්‍රසාරණය වේ. කාලය තත්පර t හි දී එහි අරය r cm වේ. එහි පරිමාව, $2\ \mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ ක නියත ශීඝ්‍රතාවකින් වැඩි වේ. $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r^2}$ බව පෙන්වන්න.
$r = 8$ වන විට, බැලූනයේ පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $0.5\ \mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ ශීඝ්‍රතාවකින් වැඩි වන බව ද පෙන්වන්න.

$V\ cm^3$ යනු ගෝලයෙහි දී පරිමාව යැයි ගනිමු

Then $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

$\therefore \frac{dv}{dr} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = 4\pi r^2$. (5)

$\frac{dv}{dt} = 2$ බව දී ඇත.

දැන්,

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$ (දාම නීතිය) (5)

$\therefore 2 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

$\therefore \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r^2}$. (5)

$S\ cm^2$ යනු ගෝලයෙහිදී පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය යැයි ගනිමු.

Then $S = 4\pi r^2$.

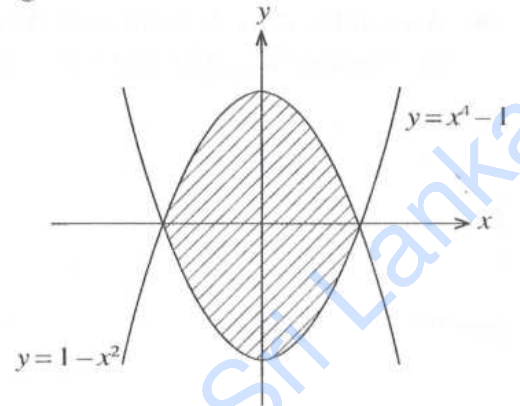
$\therefore \frac{ds}{dr} = 8\pi r$ (5)

$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}$ (දාම නීතිය)

$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{r=8} = 8\pi r \times \left.\frac{1}{2\pi r^2}\right|_{r=8} = \frac{4}{8} = 0.5$ (5)

25

10. $y = x^4 - 1$ හා $y = 1 - x^2$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන්හි x ඛණ්ඩාංකය

$x^4 - 1 = 1 - x^2$ මගින් දෙනු ලැබේ.

එනම්, $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$$\therefore \quad (x^2 - 1)\underbrace{(x^2 + 2)}_{> 0} = 0$$

$$\therefore (x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1$$

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_{-1}^{1}\{(1 - x^2)(x^4 - 1)\}\, dx$ **10**

$= \int_{-1}^{1}(2 - x^2 - x^4)\, dx$ **5**

$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}$ **5**

$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)$

$= \frac{44}{15}$ වර්ග ඒකක **5**

25

B කොටස

11. (*a*) ක්‍රීඩා සමාජයකට බැඳීම සඳහා ක්‍රීඩකයකු ශාරීරික යෝග්‍යතා පරීක්ෂණ දෙකක් සමත් විය යුතු ය. ක්‍රීඩකයන් 120 ක් මෙම පරීක්ෂණ දෙකටම මුහුණ දෙන ලදී. පළමු පරීක්ෂණය සමත් වූ ක්‍රීඩකයන්ගේ ගණන, පරීක්ෂණ දෙකම සමත් වූ ක්‍රීඩකයන් ගණන මෙන් තුන් ගුණයක් වන අතර දෙවන පරීක්ෂණය සමත් වූ ක්‍රීඩකයන්ගේ ගණන, පරීක්ෂණ දෙකම අසමත් වූ ක්‍රීඩකයන්ගේ ගණන මෙන් දෙගුණයක් බව සොයාගන්නා ලදී. එක් පරීක්ෂණයක් පමණක් සමත් වූ ක්‍රීඩකයන් ගණන 75 කි.

(i) පරීක්ෂණ දෙකම අසමත්

(ii) පරීක්ෂණ දෙකම සමත්

(iii) පළමු පරීක්ෂණය සමත්

ක්‍රීඩකයන් ගණන සොයන්න.

(a) A හා B යනු පිළිවෙලින් පළමු පරීක්ෂණය හා දෙවන පරීක්ෂණය සමත් වූ ක්‍රීඩකයන් යැයි ගනිමු.

(5)

$N(A) = 3N(A \cap B) = 3x$, මෙහි $x = N(A \cap B)$.

(5)

$N(B) = 2[120 - N(A \cap B)]$

$= 2[120 - y]$, මෙහි $y = N(A \cap B)$.

තවද,

$N[(A \cup B) \setminus (A \cap B)] = 75$. (5)

$\therefore y - x = 75$ —— ① (5)

$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, බැවින්, (5)

$y = 3x + 2(120 - y) - x$ ලැබේ. (5)

$\therefore 3y - 2x = 240$ —— ② (5)

① හා ② න්, $x = 15$ (5) හා $y = 90$. (5)

$\therefore N(A) = 45$ (5) හා $N(B) = 2(120 - 90) = 60$. (5)

(i) පිළිතුර $= 120 - N(A \cup B)$ (5)

$= 120 - y$

$= 30$ (5)

(ii) පිළිතුර $= x = 15$ (5)

(iii) පිළිතුර $= N(A) = 45$ (5)

75

(b) සත්‍යතා වගු භාවිත කර, පහත දැක්වෙන එක් එක් සංයුක්ත ප්‍රස්තුත පුනරුක්තියක් දැයි හෝ විසංවාදයක් දැයි නිර්ණය කරන්න.

(i) $\sim(p \rightarrow q) \vee (\sim p \vee (p \wedge q))$

(ii) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge \sim r)$

(b) (i) (a) (b)

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \vee (p \wedge q)$	$a \vee b$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	T	F	T	F	T	T
5		5	5		5	5	5

$\therefore a \vee b$ පුනරුක්තයක් (5)

35

(ii)

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \wedge \sim r$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge \sim r)$
T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	F	T	F
T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	F	F
F	F	F	T	T	F	F
10			5	5	5	10

$\therefore (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (p \wedge \sim r)$ විසංවාදයක් වේ. (5)

40

---

12. (a) ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$\sum_{r=1}^{n}\left(6r^2+1\right)=n\left(2n^2+3n+2\right)$$ බව සාධනය කරන්න.

a)

$n = 1$විට, ව.පැ. $= 6 + 1 = 7$

ද.පැ. $= 1 \cdot (2 + 3 + 2) = 7$ } 5

$\therefore n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵල සත්‍ය වේ. 5

k යන ඕනෑම ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් ගෙන $n = k$. 5

එනම්, $\sum_{r=1}^{k}(6r^2 + 1) = k(2k^2 + 3k + 2)$ 5

දැන් $\sum_{r=1}^{k+1}(6r^2 + 1) = \sum_{r=1}^{k}(6r^2 + 1) + \{6(k + 1)^2 + 1\}$ 10

$= k(2k^2 + 3k + 2) + 6(k + 1)^2 + 1$ 5

$= 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 + 6(k + 1)^2$

$= (k + 1)(2k^2 + k + 1) + 6(k + 1)^2$

$= (k + 1)\{2k^2 + k + 1 + 6k + 6\}$ 5

$= (k + 1)\{2(k^2 + 2k + 1) + 3(k + 1) + 2\}$

$= (k + 1)\{2(k + 1)^2 + 3(k + 1) + 2\}$ 10

එනයින්, $n = k$, සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n = k + 1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

$n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත.

එනයින්, ගණිතමය අභ්‍යුහන මූල ධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍යවේ. 5

55

(b) $r \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා $U_r = \dfrac{3}{(3r-1)(3r+2)}$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා $U_r = \dfrac{1}{3r-1} - \dfrac{1}{3r+2}$ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$n \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා $\sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3n+2}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_{r+1} = \dfrac{1}{5}$ බව අපෝහනය කරන්න.

b)

$$\frac{1}{3r-1} - \frac{1}{3r+2} = \frac{(3r+2)-(3r-1)}{(3r-1)(3r+2)}$$ (10)

$$= \frac{1}{(3r-1)(3r+2)}$$ (5)

$$= U_r$$

$$\therefore\ U_r = \frac{1}{3r-1} - \frac{1}{3r+2}$$ (5)

20

$r = 1;\quad U_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5}$

$r = 2;\quad U_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}$ (10)

$\vdots$

$r = n-1;\quad U_{n-1} = \frac{1}{3n-4} - \frac{1}{3n-1}$

$r = n;\quad U_n = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}$ (10)

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}$$ (10)

30

---

(5) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$$ (5)

$$= \frac{1}{2}$$ (5)

$\therefore$ $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වන අතර, එහි ඓක්‍ය $= \frac{1}{2}$ (5)

(5)

25

$$\sum_{r=1}^{\infty} U_{r+1} = \sum_{r=1}^{\infty} U_r - U_1$$ (10)

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$$ (5)

$$= \frac{1}{5}$$ (5)

20

---

13. (a) $k\left(\neq -\frac{1}{2}\right)$ යනු තාත්ත්වික නියතයක් යැයි ගනිමු.
$(2k+1)x^2 - 2x - k = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණයට ප්‍රභින්න තාත්ත්වික මූල ඇති බව පෙන්වන්න.
$p = 2\alpha + \beta$ හා $q = \alpha + 2\beta$ යැයි ගනිමු; මෙහි α හා β යනු ඉහත සමීකරණයෙහි මූල වේ.
$p + q$ හා pq යන ඒවා k ඇසුරින් ප්‍රකාශ කර, p හා q මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

(a.) විවේචකය $\Delta = (-2)^2 - 4(2k+1)(-k)$ (5)

$= 4 + 8k^2 + 4k$

$= 8\left(k^2 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}\right)$ (5)

$= 8\left\{\left(k + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16}\right\}$

$= 8\left\{\left(k + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right\}$ (5)

> 0 (5)

∴ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇත. (5)

25

$\alpha + \beta = \frac{2}{(2k+1)}$ (5) හා $\alpha\beta = -\frac{k}{(2k+1)}$. (5)

එවිට $p + q = (2\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta)$

$= 3(\alpha + \beta)$ (5)

$= \frac{6}{(2k+1)}$ (5)

$pq = (2\alpha + \beta)(\alpha + 2\beta)$

$= 2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2$ (5)

$= 2(\alpha^2 + \beta^2) + 5\alpha\beta$

$= 2(\alpha + \beta)^2 + \alpha\beta$ (5)

$= 2 \cdot \frac{4}{(2k+1)^2} - \frac{k}{(2k+1)}$ (5)

$= \frac{1}{(2k+1)^2}(8 - 2k^2 - k)$ (5)

අවශ්‍ය වර්ගජ සමීකරණය

$(x - p)(x - q) = 0$. (5)

$x^2 - (p+q)x + pq = 0$ (5)

$x^2 - \frac{6}{(2k+1)}x + \frac{1}{(2k+1)^2}(8 - k - 2k^2) = 0$ (5)

$(2k+1)^2x^2 - 6(2k+1)x + (8 - k - 2k^2) = 0$ (5)

60

(b) $p(x) = x^4 + 5x + a$ යැයි ගනිමු; මෙහි a යනු තාත්ත්වික නියතයකි.
$p(x)$ යන්න $x^2 - x + 3$ න් බෙදේ නම්, a හි අගය සොයා $p(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.
ඒ නයින්, $p(x) = 0$ සමීකරණයෙහි සියලු තාත්ත්වික මූල සොයන්න.

(b.) $x^4 + 5x + a = (x^2 - x + 3)(x^2 + bx + c)$, (10) where $b, c \in \mathbb{R}$.

$= x^4 + bx^3 + cx^2 - x^3 - bx^2 - cx + 3x^2 + 3bx + 3c$

$= x^4 + (b-1)x^3 + (c - b + 3)x^2 + (3b - c)x + 3c$ (10)

සංගුණක සැපයීමෙන්:

$x^3: \ b - 1 = 0$

$x^2: c - b + 3 = 0$ (20)

$x^1: 3b - c = 5$

$x^0: a = 3c$

$\therefore b = 1, \ \ c = -2,$ හා $= -6$.

(5) (5) (5)

55

එනයින්, $p(x) = (x^2 - x + 3)(x^2 + x - 2)$ (5)

$= (x^2 - x + 3)(x + 2)(x - 1).$ (5)

10

---

14. (a) $k \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(k+x)^8$ හි ප්‍රසාරණයේ පළමු පද 4, k ඇසුරින් සොයන්න. මෙම ප්‍රසාරණයේ x^2 හා x^3 පදවල සංගුණක සමාන යැයි දී ඇති විට, k හි අගය සොයන්න.

a) $(k+x)^8 = k^8 + {}^8C_1 k^7 x + {}^8C_2 k^6 x^2 + {}^8C_3 k^5 x^3 + \cdots + x^8$ (20)

$= k^8 + 8k^7 x + 28k^6 x^2 + 56k^5 x^3 + \cdots + x^8$ (15)

∴ අවශ්‍ය පළමු පද හතර,

$k^8, 8k^7x, 28k^6x^2$ and $56k^5x^3$ වේ. (10)

$28k^6 = 56k^5$ බව දී ඇත. (10)

$\therefore k^5(k-2) = 0$

$\therefore k = 2$ (5) $(\because k \neq 0)$

60

(b) සමාගමක් 2020 වර්ෂයේදී රු. 20 000 000 ක ලාභයක් උපයා ඇත. ලාභ වැඩි කරගැනීම සඳහා සමාගම A සැලසුම හා B සැලසුම නම් වූ සැලසුම් දෙකක් සලකා බලන ලදී. A සැලසුම යටතේ, සෑම වසරකම වාර්ෂික ලාභය කලින් වසරේ ලාභය මෙන් 5% කින් වැඩි විය යුතු ය. මෙම සැලසුම යටතේ 2020 සිට 2029 දක්වා වසර 10 තුළ ලැබෙන මුළු ලාභය සොයන්න.

B සැලසුම යටතේ, සෑම වසරකම වාර්ෂික ලාභය නියත රු. D ප්‍රමාණයකින් වැඩි විය යුතු ය. 2020 සිට 2029 දක්වා වසර 10 තුළ මුළු ලාභය සැලසුම් දෙකෙහි සමාන වන පරිදි වූ D හි අගය සොයන්න.

b) Let $S = 20,000,000$.

A සැලැස්ම

P_n වෙනි වසර අවසානයේදී ලාභය n යැයි ගනිමු

එවිට $P_1 = S + S \times \frac{5}{100} = \frac{21}{20}S$ (10)

$P_2 = \left(\frac{21}{20}S\right) \times \frac{21}{20} = \left(\frac{21}{20}\right)^2 S$ (5)

⋮

$P_n = \left(\frac{21}{20}\right)^n S$ (10)

වසර 10 ක කාලයක් සඳහා මුළු ලාභය $= S + P_1 + P_2 + \cdots + P_9$ (10)

5 $= S + \frac{21}{20}S + \left(\frac{21}{20}\right)^2 S + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^9 S$

$= S\left(1 + \frac{21}{20} + \left(\frac{21}{20}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^9\right)$

10 $= \frac{S\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]}{\left(\frac{21}{20} - 1\right)}$

5 $= 20S\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right]$, මෙහි $S = 20{,}000{,}000.$

B සැලැස්ම

වසර 10 ක කාලයක් සඳහා මුළු ලාභය $= S + (S + D) + (S + 2D) + \cdots + (S + 9D)$ 10

$= 10S + \frac{9}{2}(10)D$

$= 10S + 45D$ 5

$20S\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right] = 10S + 45D$ බව දී ඇත. 10

$\therefore D = \frac{1}{9}\left\{4\left[\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 1\right] - 2\right\}S$

$= \frac{2}{9}\left\{2\left(\frac{21}{20}\right)^{10} - 3\right\}S,$ 10 මෙහි $S = 20{,}000{,}000$

90

---

15. $A \equiv (1, a), B \equiv (-3, b)$ හා $M \equiv (c, 1)$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ ද M යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය ද වේ.
c හි අගය සොයා $C \equiv (a-2, b-1)$ යන ලක්ෂ්‍යය $l: x+y+1=0$ රේඛාව මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.
AB, l ට සමාන්තර බව දී ඇත.
a හා b හි අගයන් සොයන්න.
a, b හා c සඳහා ඉහත අගයන් ඇතිව
(i) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි D ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද,
(ii) $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ද
සොයන්න.
m යනු $2x+y=3$ රේඛාව යැයි ගනිමු. l හා m හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන BD ට ලම්බ රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

M යනු AB, හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය වේ.

$(c, 1) = \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$ (10)

$c = -1$ (5) හා $a + b = 2.$ (5)

$x = a - 2$ හා $y = b - 1$ යන ඒවා $x + y + 1$: හි ආදේශ කරමු.

$$x + y + 1 = (a-2) + (b-1) + 1 \quad (10)$$
$$= a + b - 2$$
$$= 0 \quad (5)$$
(by 1)

$\therefore C, l$ මත පිහිටයි. (5)

40

---

l හි අනුක්‍රමණය $= -1.$ (5)

AB හි අනුක්‍රමණය $= \frac{b-a}{-4}.$ (5)

$AB // l$, බැවින් $\frac{b-a}{-4} = -1.$ (5)

$\therefore b - a = 4$

$\Rightarrow b = 3$ (5) හා $a = -1.$ (5)

25

දැන්, $A \equiv (1,-1)$, $B \equiv (-3,3)$ හා $C \equiv (-3,2)$.

i. $D \equiv (\alpha, \beta)$ යැයි ගනිමු (15)

එවිට $\left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \equiv \left(\frac{-3+\alpha}{2}, \frac{3+\beta}{2}\right)$.

$\therefore -2 = -3 + \alpha$ හා $1 = 3 + \beta$.

$\therefore \alpha = 1$ (5) හා $\beta = -2$. (5)

$\therefore D \equiv (1,-2)$ (5)

30

---

ii. ΔABC වර්ගඵලය $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (10)

$c_1 \to c_1 + c_2$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= \frac{1}{2}(-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$ වර්ග ඒකක (10)

$\therefore$ ABCD හි වර්ගඵලය $= 4$ වර්ග ඒකක (5)

25

අවශ්‍ය සමීකරණය $: (x + y + 1) + \lambda(2x + y - 3) = 0$ (5) මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$.

BD හි අනුක්‍රමණය $= \frac{3+2}{-3-1} = -\frac{5}{4}$ (5)

අවශ්‍ය රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}$ (5)

මෙම රේඛා ලම්බ වන බැවින්,

$$\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{(1+2\lambda)}{(1+\lambda)}\right) = -1.$$ (5)

$$5 + 10\lambda = -4 - 4\lambda$$

$$14\lambda = -9$$

$$\lambda = -\frac{9}{14}.$$ (5)

පිළිතුර : $14(x + y + 1) - 9(2x + y - 3) = 0$

i.e. $-4x + 5y + 41 = 0$ (5)

30

---

16. (a) $\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^3}{(x-2)} \cdot \frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}$ අගයන්න.

a)

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^2-4)^3}{(x-2)} \cdot \frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^3(x+2)^3}{(x-2)} \cdot \frac{2}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})^2} \cdot \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2} \quad (15)$$

$$= \lim_{x\to 2} (x-2)^2(x+2)^3 \cdot \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2}{(x-2)^2} \quad (10)$$

$$= \lim_{x\to 2} (x+2)^3 \cdot 2(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2 \quad (5)$$

$$= 4^3 \cdot 2 \cdot (2\sqrt{2})^2 \quad (10)$$

$$= 1024 \quad (5)$$

45

(b) පහත එක එකක් x විෂයයෙන් අවකලනය කරන්න.

(i) $\frac{3x^2+1}{x^2+3}$ (ii) $x^8 \ln x + \frac{(x+1)}{\ln x}$ (iii) $\sqrt{(e^{2x}+1)^2+1}$

b) i)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3x^2+1}{x^2+3}\right) = \frac{(x^2+3)(6x)-(3x^2+1)(2x)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{14x}{(x^2+3)^2} \quad (15)$$

ii)

$$\frac{d}{dx}\left\{x^8 \ln x + \frac{(x+1)}{\ln x}\right\} = x^8 \times \frac{1}{x} + 8x^7 \ln x + \frac{\ln x - (x+1)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

$$(20) \quad = x^7 + 8x^7 \ln x + \frac{x\ln x - x - 1}{x(\ln x)^2}$$

iii)

$$\frac{d}{dx}\sqrt{(e^{2x}+1)^2+1} = \frac{1}{2}\{(e^{2x}+1)^2+1\}^{-\frac{1}{2}} \times 2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}$$

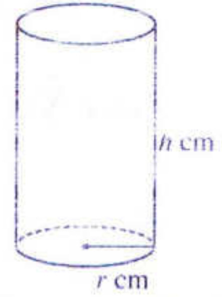
(15)

55

(c) පරිමාව 128π cm³ ක් වූ සංවෘත සිලින්ඩරාකාර භාජනයක් තැනිය යුතුව ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි එහි අරය r cm හා උස h cm යැයි ගනිමු. $r > 0$ සඳහා, භාජනයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm².

$S = 2\pi\left(r^2 + \frac{128}{r}\right)$ මගින් ලබාදෙන බව පෙන්වන්න.

S අවම වන r හි අගය සොයන්න.



c)

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ——— (1) (10)

$\pi r^2 h = 128\pi$ බව දී ඇත. (5)

$\therefore h = \frac{128}{r^2}$

දැන්, (1) න්

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \frac{128}{r^2}$ (5)

පිළිතුර (5)

25

දී ඇති S සඳහා,

$\frac{ds}{dr} = 2\pi\left(2r - \frac{128}{r^2}\right) = \frac{4\pi}{r^2}(r^3 - 64)$

(10)

$\frac{ds}{dr} = 0 \quad \Leftrightarrow r^3 = 64$

(5) $\Leftrightarrow r = 4$ (5)

$\frac{ds}{dr} < 0$,$0 < r < 4$ සඳහා

$\frac{ds}{dr} > 0$, $r > 4$ සඳහා

$\therefore S$ අවම වන $r = 4.$ (5)

25

---

17. (a) භින්න භාග ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}\,dx$ සොයන්න.

(a) $\frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$ (10)

$1 = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1)$

$= A(x^2-4x+4) + B(x^2-3x+2) + C(x-1)$ (5)

$= (A+B)x^2 + (-4A-3B+C)x + 4A + 2B - C$

සංගුණක සැපයීමෙන්:

$x^2: 0 = A + B$

(10) $x^1: 0 = -4A - 3B + C$

$x^0: 1 = 4A + 2B - C$

$\Rightarrow B = -1$

$\therefore A = 1,$ (5) $B = -1$ (5) හා $C = 1$ (5)

දැන්,

(5)

$\int \frac{1}{(x-1)(x-2)^2} = \int \left\{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right\} dx$

(15) $= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{(x-2)^2} + c$

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි

60

(b) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය කිරීමේ ක්‍රමය භාවිතයෙන්, $\int x(e^x + 2e^{2x})\,dx$ සොයන්න.

(b) $\int x(e^x + 2e^{2x})dx$

$= x(e^x + e^{2x}) - \int (e^x + e^{2x})dx$ (15)

$= x(e^x + e^{2x}) - e^x - \frac{1}{2}e^{2x} + C$ (10)

මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි

$u = x, dv = (e^x + e^{2x})dx$

$\frac{du}{dx} = 1, v = \int (e^x + e^{2x})dx$

$du = dx, v = e^x + e^{2x}$

25

(c) පහත වගුවෙන්, 0 හා 1 අතර, දිග 0.25 ක් වූ ප්‍රාන්තරවලදී x හි අගයන් සඳහා $f(x) = xe^{x^2}$ යන ශ්‍රිතයෙහි අගයන් දශමස්ථාන තුනකට නිවැරදිව දෙයි.

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	0.266	0.642	1.316	2.718

සිම්සන් නීතිය භාවිතයෙන්, $I = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx$ සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

ඒ නයින්, e සඳහා ආසන්න අගයක් සොයන්න.

(c)

x	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	0.266	0.642	1.316	2.718
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

$h = 0.25$ (5)

$$I = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_4) + 2y_2 + y_4]$$ (20)

$$= \frac{0.25}{3}[0 + 4 \times 1.582 + 2 \times 0.642 + 2.718]$$ (5)

$$= \frac{0.25}{3}[6.328 + 1.284 + 2.718]$$

$$= \frac{0.25}{3} \times 10.33$$ (5)

$$\approx 0.861$$ (5)

40

$$I = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$

(10) $$= \left.\frac{e^{x^2}}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1)$$ (5)

$$\therefore \frac{1}{2}(e - 1) \approx 0.861$$ (5)

$$\therefore e \approx 2.722$$ (5)

25

අ.පො.ස (උ.පෙළ) විභාගය - 2021(2022)

07 - ගණිතය II

ලකුණු බෙදී යාමේ ආකාරය

I පත්‍රය

A කොටස	= 10×25	=	250
B කොටස	= 05×150	=	750

එකතුව $= \dfrac{1000}{10}$

අවසාන ලකුණු = **100**

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ පොදු ශිල්පීය ක්‍රම

උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමේ හා ලකුණු ලැයිස්තුවල ලකුණු සටහන් කිරීමේ සම්මත ක්‍රමය අනුගමනය කිරීම අනිවාර්යයෙන් ම කළ යුතුවේ. ඒ සඳහා පහත පරිදි කටයුතු කරන්න.

1. උත්තරපත්‍ර ලකුණු කිරීමට රතුපාට බෝල් පොයින්ට් පෑනක් පාවිච්චි කරන්න.
2. සෑම උත්තරපත්‍රයකම මුල් පිටුවේ සහකාර පරීක්ෂක සංකේත අංකය සටහන් කරන්න. ඉලක්කම් ලිවීමේදී **පැහැදිලි ඉලක්කමෙන්** ලියන්න.
3. ඉලක්කම් ලිවීමේදී වැරදුණු අවස්ථාවක් වේ නම් එය පැහැදිලිව තනි ඉරකින් කපා හැර නැවත ලියා කෙටි අත්සන යොදන්න.
4. එක් එක් ප්‍රශ්නයේ අනු කොටස්වල පිළිතුරු සඳහා හිමි ලකුණු ඒ ඒ කොටස අවසානයේ △ ක් තුළ ලියා දක්වන්න. අවසාන ලකුණු ප්‍රශ්න අංකයත් සමග □ ක් තුළ, භාග සංඛ්‍යාවක් ලෙස ඇතුළත් කරන්න. ලකුණු සටහන් කිරීම සඳහා පරීක්ෂකවරයාගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා ඇති තීරුව භාවිත කරන්න.

උදාහරණ : ප්‍රශ්න අංක 03

(i) .... √ $\frac{4}{5}$
....
....

(ii) .... √ $\frac{3}{5}$
....
....

(iii) .... √ $\frac{3}{5}$
....
....

(03) (i) $\frac{4}{5}$ + (ii) $\frac{3}{5}$ + (iii) $\frac{3}{5}$ = $\frac{10}{15}$

බහුවරණ උත්තරපත්‍ර : (කවුළු පත්‍රය)

1. අ.පො.ස. (උ.පෙළ) හා තොරතුරු තාක්ෂණ විභාගය සඳහා කවුළු පත්‍ර දෙපාර්තමේන්තුව මගින් සකසනු ලැබේ. නිවැරදි වරණ කපා ඉවත් කළ සහතික කරන ලද කවුළුපතක් ඔබ වෙත සපයනු ලැබේ. සහතික කළ කවුළු පත්‍රයක් භාවිත කිරීම පරීක්ෂකගේ වගකීම වේ.
2. අනතුරුව උත්තරපත්‍ර හොඳින් පරීක්ෂා කර බලන්න. කිසියම් ප්‍රශ්නයකට එක් පිළිතුරකට වඩා ලකුණු කර ඇත්නම් හෝ එකම පිළිතුරක්වත් ලකුණු කර නැත්නම් හෝ වරණ කැපී යන පරිදි ඉරක් අඳින්න. ඇතැම් විට අයදුම්කරුවන් විසින් මුලින් ලකුණු කර ඇති පිළිතුරක් මකා වෙනත් පිළිතුරක් ලකුණු කර තිබෙන්නට පුළුවන. එසේ මකන ලද අවස්ථාවකදී පැහැදිලිව මකා නොමැති නම් මකන ලද වරණය මත ද ඉරක් අඳින්න.

3. කවුළු පත්‍රය උත්තරපත්‍රය මත නිවැරදිව තබන්න. නිවැරදි පිළිතුර ✓ ලකුණකින් ද, වැරදි පිළිතුර 0 ලකුණකින් ද වරණ මත ලකුණු කරන්න. නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව ඒ ඒ වරණ තීරයට පහළින් ලියා දක්වන්න. අනතුරුව එම සංඛ්‍යා එකතු කර මුළු නිවැරදි පිළිතුරු සංඛ්‍යාව අදාළ කොටුව තුළ ලියන්න.

ව්‍යුහගත රචනා හා රචනා උත්තරපත්‍ර :

1. අයදුම්කරුවන් විසින් උත්තරපත්‍රයේ හිස්ව තබා ඇති පිටු හරහා රේඛාවක් ඇඳ කපා හරින්න. වැරදි හෝ නුසුදුසු පිළිතුරු යටින් ඉරි අඳින්න. ලකුණු දිය හැකි ස්ථානවල හරි ලකුණු යෙදීමෙන් එය පෙන්වන්න.

2. ලකුණු සටහන් කිරීමේදී ඕවර්ලන්ඩ් කඩදාසියේ දකුණු පස තීරය යොදා ගත යුතු වේ.

3. සෑම ප්‍රශ්නයකටම දෙන මුළු ලකුණු උත්තරපත්‍රයේ මුල් පිටුවේ ඇති අදාළ කොටුව තුළ ප්‍රශ්න අංකය ඉදිරියෙන් අංක දෙකකින් ලියා දක්වන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස් අනුව ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීම කළ යුතුවේ. සියලු ම උත්තර ලකුණු කර ලකුණු මුල් පිටුවේ සටහන් කරන්න. ප්‍රශ්න පත්‍රයේ දී ඇති උපදෙස්වලට පටහැනිව වැඩි ප්‍රශ්න ගණනකට පිළිතුරු ලියා ඇත්නම් අඩු ලකුණු සහිත පිළිතුරු කපා ඉවත් කරන්න.

4. පරීක්ෂාකාරීව මුළු ලකුණු ගණන එකතු කොට මුල් පිටුවේ නියමිත ස්ථානයේ ලියන්න. උත්තරපත්‍රයේ සෑම උත්තරයකටම දී ඇති ලකුණු ගණන උත්තරපත්‍රයේ පිටු පෙරළමින් නැවත එකතු කරන්න. එම ලකුණු ඔබ විසින් මුල් පිටුවේ එකතුව ලෙස සටහන් කර ඇති මුළු ලකුණට සමාන දැයි නැවත පරීක්ෂා කර බලන්න.

ලකුණු ලැයිස්තු සකස් කිරීම :

සියලු ම විෂයන්හි අවසාන ලකුණු ඇගයීම් මණ්ඩලය තුළදී ගණනය කරනු නොලැබේ. එබැවින් එක් එක් පත්‍රයට අදාළ අවසාන ලකුණු වෙන වෙනම ලකුණු ලැයිස්තුවලට ඇතුළත් කළ යුතු ය. I පත්‍රය සඳහා බහුවරණ පිළිතුරු පත්‍රයක් පමණක් ඇති විට ලකුණු ලැයිස්තුවට ලකුණු ඇතුළත් කිරීමෙන් පසු අකුරෙන් ලියන්න. අනෙකුත් උත්තරපත්‍ර සඳහා විස්තර ලකුණු ඇතුළත් කරන්න.

***

A කොටස

1. $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & b^2+ab \\ a^2+ab & b^2 & ab \\ ab & 2b^2 & b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^4$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.

1) $$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & b^2+ab \\ a^2+ab & b^2 & ab \\ ab & 2b^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & b^2+ab \\ ab & 0 & -b^2 \\ -2a^2+ab & 0 & -b^2-2ab \end{vmatrix}$$ $R_2 \to (-1)R_1 + R_2$

$R_3 \to (-2)R_1 + R_3$

(5) + (5)

$$= \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & b^2+ab \\ ab & 0 & -b^2 \\ -2a^2+ab & 0 & -b^2-2ab \end{vmatrix}$$

$$= -b^2 \begin{vmatrix} ab & -b^2 \\ -2a^2+ab & -b^2-2ab \end{vmatrix}$$ (R_1 වලින් ප්‍රසාරණය කිරීමෙන්)

(5)

$$= -b^2 \begin{vmatrix} ab & -b^2 \\ -2a^2 & -2ab \end{vmatrix}$$ $R_2 \to (-1)R_1 + R_2$ (5)

$$= -b^2[-2a^2b^2 - 2a^2b^2]$$

$$= 4a^2b^4$$ (5)

25

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ හා $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. **AB** හා **A(2B − C)** සොයන්න.
2AB − AC = A(2B − C) බව සත්‍යාපනය කරන්න.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$ (5)

$$2B - C = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$ (5)

$$A(2B - C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -11 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$ (5)

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ (5)

$$2AB - AC = 2\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 18 & -11 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$ (5)

$\therefore 2AB - AC = A(2B - C)$

25

3. දින 5ක දෛනික වර්ෂාපතන මිනුම් නිරීක්ෂණය කරන ලදී. එම මිනුම්වල එකතුව හා වර්ගවල එකතුව පිළිවෙළින් 45 ml හා 650 ml^2 වේ. වර්ෂාපතන මිනුම්වල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය සොයන්න.
ඊළඟ දින දෙකෙහි දෛනික වර්ෂාපතන මිනුම් ද නිරීක්ෂණය කරන ලද අතර එම අගයන් 10 ml හා 8 ml වේ. මධ්‍යන්‍යයේ නව අගය සොයන්න.

i වෙනි දිනයේදී වර්ෂාපතන මිනුම x_i (ml වලින්) යැයි ගනිමු.

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 45$ හා $\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2 = 650$ බව දී ඇත.

μ ml හා σ ml යනු පිළිවෙළින් මෙම වර්ෂාපතන මිනුම් 5හි මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය යැයි ගනිමු.

එවිට $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{45}{5} = 9$ (5)

(5)

හා $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2}{5} - \mu^2$ (5)

$= \frac{650}{5} - 9^2$

$= 49$

$\therefore\ \sigma = 7.$ (5)

$x_6 = 10$ හා $x_7 = 8$ බව දී ඇත.

නව මධ්‍යන්‍යය $= \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i}{7} = \frac{45+10+8}{7} = \frac{63}{7} = 9\ ml.$

(5)

25

---

4. පිටු 200 ක් ඇති පොතක මුද්‍රණ දෝෂ 20 ක් ඇති අතර එම දෝෂ සසම්භාවී ලෙස ව්‍යාප්තව ඇත. පිටුවකට ඇති දෝෂ ගණනට පුවාසොන් ව්‍යාප්තියක් ඇත. සසම්භාවී ලෙස තෝරාගත් පිටු 10 ක එක් දෝෂයක් පමණක් තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

X යනු පිටුවකට ඇති දෝෂ ගණන යැයි ගනිමු.

$X \sim Poi\ (\lambda)$, මෙහි $\lambda = \frac{20}{200} = 0.1$ (5)

එවිට $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ (5)

Y යනු පිටු 10ක ඇති දෝෂ ගණන යැයි ගනිමු.

එවිට $Y = 10X$ හා $Y \sim Poi\ (10\lambda) = Poi(1)$ වේ.

(5)

$P(Y = k) = \frac{1^k e^{-1}}{k!}$ (5)

$\therefore P(Y = 1) = e^{-1}$. (5)

25

5. සමාගමක සේවකයන්ගේ මාසික වේතනය රුපියල් දහස්වලින්, මධ්‍යන්‍යය 80ක් හා සම්මත අපගමනය 25ක් ලෙස ප්‍රමතව ව්‍යාප්තව ඇත. වේතනවලින් අඩුතම 10% ලබාගන්නා සේවකයන් හට සමාගම නොමිලේ ප්‍රවාහන පහසුකම් සපයයි. නොමිලේ දෙන ප්‍රවාහන පහසුකම් සඳහා සුදුසුකම් ඇති සේවකයන් විසින් උපයාගනු ලබන වැඩිතම වේතනය සොයන්න.

X යනු සේවකයෙකුගේ වැටුප (රුපියල් දහසේ ඒවායින්) යැයි ගනිමු.

$X \sim N(80, 25^2)$ බව දී ඇත.

නොමිලයේ ප්‍රවාහන පහසුකම් සඳහා සුදුසුකම් ඇති සේවකයන්ගේ උපරිම වැටුප k (රුපියල් දහසේ ඒවායින්) යැයි ගනිමු.

එවිට $P(X \leq k) = 0.1$ (5)

$\therefore P\left(\frac{X-80}{25} \leq \frac{k-80}{25}\right) = 0.1$ (5)

එනම් $P\left(Z \leq \frac{k-80}{25}\right) = 0.1$ (5)

ප්‍රමත වගුවෙන්, $\frac{k-80}{25} = -1.281$ (5)

$\therefore k = 47.975$ රුපියල් දහසේ ඒවායින් (5)

$\therefore k =$ රු.47 975.00.

25

6. එක්තරා දුරස්ථ පාලක වර්ගයකින් 15% ක් එහි නිෂ්පාදනයෙන් පළමු වසර තුළ ක්‍රියාවිරහිත වන බව සමීක්ෂණ වාර්තාවක සඳහන් වේ. එම වර්ගයේ දුරස්ථ පාලක 5 ක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගනු ලැබුවහොත්,
(i) ඒවායින් 3 ක් පළමු වසර තුළ ක්‍රියාවිරහිත වීමේ,
(ii) ඒවායින් 2 කට වඩා පළමු වසර තුළ ක්‍රියාවිරහිත වීමේ,
සම්භාවිතාව සොයන්න.

පළමු වන වසර තුලදී අක්‍රිය වන දුරස්ථ පාලක ගණන X යැයි ගනිමු.

එවිට $P(X = k) = {}^5C_k\, p^k\, (1-p)^{5-k}$ (5)

i) $\therefore\ P(X = 3) = {}^5C_3\, (0.15)^3\, (0.85)^2$ (5)

≈ 0.02 (5)

ii) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2)$ (5)

$= 1 - \{P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)\}$

$= 1 - {}^5C_2\, (0.15)^2\, (0.85)^3 - {}^5C_1\, (0.15)\, (0.85)^4 - {}^5C_0\, (0.85)^5$ (5)

25

7. පුද්ගලයකුට ඔහු අයදුම් කළ පළමු හා දෙවැනි රැකියාව ලැබීමේ සම්භාවිතාවන් පිළිවෙළින් 0.5 හා 0.3 වේ. ඔහු අයදුම් කළ රැකියා දෙකම ලැබීමේ සම්භාවිතාව 0.4 වේ.
(i) අඩු තරමින් ඔහු අයදුම් කළ රැකියාවලින් එකක් හෝ ලැබීමේ,
(ii) අයදුම් කළ පළමු රැකියාව ලැබුණ බව දී ඇති විට, ඔහු අයදුම් කළ දෙවැනි රැකියාව ලැබීමේ,
සම්භාවිතාව සොයන්න.

A: A පුද්ගලයෙකුට අයදුම් කරන පළමු රැකියාව ලැබීම

B: A පුද්ගලයෙකුට අයදුම් කරන දෙවන රැකියාව ලැබීම

$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ හා $P(A \cap B) = 0.4$ බව දී ඇත.

(i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (10)

$= 0.5 + 0.3 - 0.4$ (5)

$= 0.4$

(ii) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$ (5)

(5)

25

8. A හා B යනු $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A'\cap B)=\frac{1}{2}$ හා $P(B|A)=\frac{4}{5}$ වන පරිදි වූ S නියැදි අවකාශයක සිද්ධීන් දෙකක් යැයි ගනිමු. (i) $P(A\cup B)$, (ii) $P(A\cap B)$ හා (iii) $P(B)$ සොයන්න.

$P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A'\cap B)=\frac{1}{2}$ and $P(B|A)=\frac{4}{5}$.

(i) $P(A\cup B)=P(A)+P(A'\cap B)$ (5)

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{4}$$ (5)

(ii) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ (5)

$$\therefore P(A\cap B)=P(B|A)\cdot P(A)$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{5}$$ (5)

(iii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+P(B)-\frac{1}{5}$$ (5)

$$\therefore P(B)=\frac{7}{10}$$

25

---

9. පසුගිය වාර්තාවලට අනුව, පන්තියකට ප්‍රමාද වී පැමිණි සිසුන් ගණන X හි සම්භාවිතා ව්‍යාප්තිය පහත දී ඇත.

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	p	0.3	$3p$	0.2	p

p නියතයෙහි අගය සොයා, $E(X) = 1.9$ බව පෙන්වන්න.

Y යනු $2X + 3$ මගින් දෙනු ලබන සසම්භාවී විචලයය යැයි ගනිමු. $E(Y)$ සොයන්න.

$p + 0.3 + 3p + 0.2 + p = 1$ (5)

$\therefore\ p = 0.1$ (5)

$E(X) = 1 \times 0.3 + 6 \times 0.1 + 0.6 + 4 \times 0.1$

$= 1.9$ (5)

$E(Y) = E(2X + 3)$

$= 2E(X) + 3$ (5)

$= 3.8 + 3$

$= 6.8$ (5)

25

10. X යනු සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයකට

$$f(x)=\begin{cases} 2ax-3bx^2 & , \ 0\le x\le 1 \text{ නම්,} \\ 0 & , \ \text{එසේ නොවන විට,} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබන $f(x)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතය ඇත; මෙහි a හා b නියත වේ. $E(X^2)=\frac{1}{4}$ බව දී ඇත. a හා b හි අගයන් සොයන්න.

$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$

$\therefore \int_0^1 (2ax-3bx^2)dx = 1$ (5)

$\left(2a\frac{x^2}{2} - 3b\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1$

$a-b=1$ —— ① (5)

$E(x^2)=\frac{1}{4}$

$\therefore \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{4}$

$\therefore \int_0^1 (2ax^3-3bx^4)dx = \frac{1}{4}$ (5)

$\frac{2a}{4} - \frac{3b}{5} = \frac{1}{4}$ (5)

$10a - 12b = 5$ —— ②

① & ② $\Longrightarrow a = \frac{7}{2}$ and $b = \frac{5}{2}$ (5)

25

B කොටස

11. සුපිරි වෙළඳසැලක් වර්ග 3 ක තෑගි මලු සාදයි: මූලික, ප්‍රමිත හා සුඛෝපභෝගී යනුවෙනි.
සෑම මූලික තෑගි මල්ලකම පැකට්ටු 6 ක්, බෝතල් 9 ක් හා ටින් 6 ක් බැගින් ද,
සෑම ප්‍රමිත තෑගි මල්ලකම පැකට්ටු 9 ක්, බෝතල් 6 ක් හා ටින් 8 ක් බැගින් ද,
සෑම සුඛෝපභෝගී තෑගි මල්ලකම පැකට්ටු 9 ක්, බෝතල් 9 ක් හා ටින් 10 ක් බැගින් ද ඇත.
සෑම දිනකම, සුපිරි වෙළඳසැල අඩුම තරමේ පැකට්ටු 720 කුත්, අඩුම තරමේ බෝතල් 720 කුත් යොදාගත යුතු අතර, යොදාගත හැකි උපරිම ටින් ගණන 900 කි.
එක්තරා දිනයක, සුපිරි වෙළඳසැල ප්‍රමිත හා සුඛෝපභෝගී තෑගි මලු සමාන ගණනක් අසුරයි.
සුපිරි වෙළඳසැල, මූලික, ප්‍රමිත හා සුඛෝපභෝගී යන එක් එක් තෑගි මල්ලකින් රු. 100, රු. 200, හා රු. 500, බැගින් ලාභ ලබයි නම් හා මුළු ලාභය උපරිම කරගැනීමට බලාපොරොත්තු වේ නම්,

(i) මෙය රේඛීය ප්‍රක්‍රමණ ගැටලුවක් ලෙස සූත්‍රගත කරන්න.

x_1, x_2 හා x_3 යනු පිළිවෙළින් මූලික, ප්‍රමිත හා සුඛෝපභෝගී යන වර්ග වලින් සාදනු ලබන තෑගි මුළු ගණන යැයි ගනිමු.

$z = 100x_1 + 200x_2 + 500x_3$ හි උපරිමය (10)

පහත තත්වයන්ට යටත්ව

$6x_1 + 9x_2 + 9x_3 \geq 720$ (10)

$9x_1 + 6x_2 + 9x_3 \geq 720$ (10)

$6x_1 + 8x_2 + 10x_3 \leq 900$ (10)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ (5)

$x_2 = x_3$ බව දී ඇත. (5)

50

(ii) ශක්‍යතා පෙදෙසෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

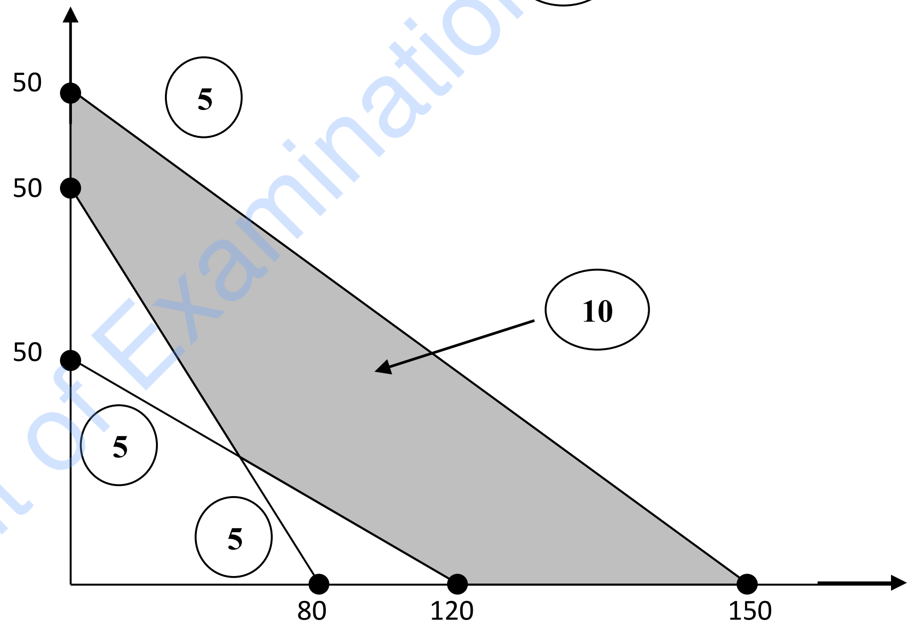
එවිට ඒකජ ප්‍රක්‍රමණ ගැටළුව පහත ලෙස ගත හැක:

$z = 100x_1 + 700x_2$ හි උපරිමය

පහත තත්වයන්ට යටත්ව

$6x_1 + 18x_2 \geq 720$		$x_1 + 3x_2 \geq 120$
$9x_1 + 15x_2 \geq 720$	හෝ	$3x_1 + 5x_2 \geq 240$
$6x_1 + 18x_2 \leq 900$		$x_1 + 3x_2 \leq 150$
$x_1, x_2 \geq 0$		$x_1, x_2 \geq 0$

15



40

(iii) ප්‍රස්තාරික ක්‍රමය භාවිතයෙන්, ඉහත (i) කොටසෙහි සූත්‍රගත කරන ලද ගැටලුවෙහි විසඳුම සොයන්න.

අන්ත ලක්ෂ්‍යයන්හි ඛණ්ඩාංකය

$A \equiv (0,50)$, $B \equiv (150,0)$, $C \equiv (0,120)$, $D \equiv (30,30)$, $E \equiv (0,48)$.

(5)

Point	Value of $z = 100x_1 + 700x_2$	
A	$z = 50 \times 700 = 35,000$	(10)
B	$z = 150 \times 100 = 15,000$	(10)
C	$z = 120 \times 100 = 12,000$	(10)
D	$z = 100 \times 30 + 700 \times 30 = 24,000$	(10)
E	$z = 48 \times 700 = 33,600$	(10)

විසඳුම: $x_1 = 0$, $x_2 = 50,$ and $x_3 = 50$

z හි උපරිමය $= 35,000$ (5)

60

12.(a) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

a හා b ඇසුරෙන් AA^T සොයන්න.

$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ නම් $a = 1$ හා $b = 2$ බව පෙන්වන්න.

$C = AA^T - 8I$ යැයි ගනිමු. C^{-1} සොයන්න.

$CD = 8C + I$ වන පරිදි D න්‍යාසය සොයන්න; මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$$AA^T = \begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 2 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & b \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+4 & 2a \\ 2a & 4+b^2 \end{pmatrix} \quad (5) \times 4$$

20

$$AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+4 & 2a \\ 2a & 4+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4 = 5, 2a = 2, 4 + b^2 = 8$$

$\Leftrightarrow a = 1$ හා $b = \pm 2$

$\Leftrightarrow a = 1$ හා $b = 2$ ($b > 0$ සඳහා)

(5)

20

$$C = AA^T - 8I$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\therefore C^{-1} = \frac{1}{(-4)}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

15

$$CD = 8C + I$$

$$\Leftrightarrow C^{-1}(CD) = C^{-1}(8C + I)$$ (5)

$$\Leftrightarrow (C^{-1}C)D = 8C^{-1}C + C^{-1}$$ (5)

$$\Leftrightarrow ID = 8I + C^{-1}$$ (5)

$$D = 8\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1/2\\ 1/2 & 3/4\end{pmatrix}$$ (5)

$$= \begin{pmatrix}8 & 1/2\\ 1/2 & 7/4\end{pmatrix}$$ (5)

25

(b) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු.

$$ax + (b-1)y = 2$$
$$x - y = -4$$

යන සමගාමී සමීකරණ යුගලය $\mathbf{PX} = \mathbf{Q}$ ආකාරයෙන් ලියා දක්වන්න; මෙහි $\mathbf{X} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ද, $\mathbf{P}$ හා $\mathbf{Q}$ යනු නිර්ණය කළ යුතු න්‍යාස ද වේ.

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}-2\\ 2\end{pmatrix}$ යන්න $\mathbf{PX} = \mathbf{Q}$ සඳහා විසඳුමක් බව දී ඇත. $b = a + 2$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණ යුගලයට

(i) $a \neq -\frac{1}{2}$ විට අනන්‍ය විසඳුමක් ඇති බවත්,

(ii) $a = -\frac{1}{2}$ විට විසඳුම් අපරිමිත සංඛ්‍යාවක් ඇති බවත්,

පෙන්වන්න.

$$\begin{pmatrix}a & b-1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}$$ (10)

$$PX = Q,$$

මෙහි $P = \begin{pmatrix}a & b-1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ හා $Q = \begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}$ (5)

(5)

20

$$\begin{pmatrix} a & b-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$ (10)

$$\Leftrightarrow -2b + 2(b-1) = 2$$ (5)

$$\Leftrightarrow -a + b - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow b = a + 2$$ (5)

20

$a \neq -\frac{1}{2}$

$$PX = Q \text{ ——— } (1)$$

$$-a - (b-1) = -2a + 1 \neq 0.$$ (5)

$\therefore$ P^{-1} පවතී. (5)

(1) ට අනන්‍ය විසඳුමක් ඇත. (5)

15

$a = -\frac{1}{2}$

එවිට $b = \frac{3}{2}$ (5) හා පද්ධතිය

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 2$$ (5)

$$x - y = -4$$

වේ.

$\therefore$ විසඳුම් $x = t$ හා $y = t + 4$ වේ. මෙහි $t \in \mathbb{R}$. (5)

$\therefore$ පද්ධතියට අනන්ත විසඳුම් ඇත

15

13.(a) නොනැඹුරු කාසි දෙකක් හා නොනැඹුරු ඝනකාකාර දාදු කැටයක් උඩ දමනු ලැබේ. කාසි දෙකේම හිස ලැබීම A සිද්ධිය යැයි ද දාදු කැටයේ ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම B සිද්ධිය යැයි ද ගනිමු.
$P(A)$, $P(B)$ හා $P(A \cup B)$ සොයන්න.

A: කාසි දෙකෙහිම හිස ලැබීම.

B: දාදු කැටයේ ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් ලැබීම.

$P(A) = \frac{1}{4}$ (5) $S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ (10)

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$ (5)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (10)

$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$ (10) ($\because$ A හා B ස්වායත්ත නිසා)

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$ (5)

$= \frac{5}{8}$ (5)

50

(b) පළමු හා දෙවන සංඛ්‍යාංක පිළිවෙළින් 3 හා 5 වන පරිදි සහ කිසිදු සංඛ්‍යාංකයක් පුනරාවර්තනය නොවන පරිදි, සංඛ්‍යාංක 6 ක දුරකතන අංක කොපමණක් සෑදිය හැකි ද?
මෙම දුරකතන අංකවලින් කොපමණක් ඔත්තේ සංඛ්‍යාංකයකින් අවසන් වේ ද?

3	5				

අවශ්‍ය සංඛ්‍යාංක 6 හි දුරකතන අංක ගණන $= 8 \times 7 \times 6 \times 5$ (20)

$= 1680$ (5)

හෝ

$8_{P_4} = 8 \times 7 \times 6 \times 5$ (20)

$= 1680$ (5)

25

එවැනි ඔත්තේ සංඛ්‍යාංකයකින් අවසන් වන අංක ගණන $= 8 \times 7 \times 6 \times 5$ (20)

$= 1008$ (5)

25

(c) කණ්ඩායමක පිරිමි 8 දෙනෙක් හා ගැහැණු 10 දෙනෙක් සිටි. මෙම කණ්ඩායමෙන්,

(i) පිරිමි 5 දෙනෙකු හා ගැහැණු 6 දෙනෙකුගෙන්

M W

8 10

පිළිතුර $= 8_{C_5} \cdot 10_{C_5}$ (10)

$= \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{10!}{6!4!}$ (10)

$= \frac{8\times7\times6}{6} \cdot \frac{10\times9\times8\times7}{24}$

$= 56 \times 210$

$= 11760$ (5)

25

(ii) අඩුම තරමින් පිරිමි 3 දෙනෙක් සහිත සාමාජිකයන් 6 දෙනෙකුගෙන් සමන්විතව, විධි කීයකට කමිටුවක් සෑදිය හැකි ද?

(ii) පිළිතුර $= 8_{C_3} \cdot 15_{C_3}$ (10)

$= \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{15!}{12!3!}$ (10)

$= 25480$ (5)

25

---

14. පෙට්ටියක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සමාන වූ කොළ පාට බෝල 3 ක් ද, නිල් පාට බෝල 2 ක් ද අඩංගු වේ. සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. ඉවතට ගත් බෝලය කොළ පාට එකක් නම්, එය ප්‍රතිස්ථාපනය නොකර වෙනත් නිල් පාට බෝල 2 ක් පෙට්ටියට එකතු කරනු ලබන අතර ඉවතට ගත් බෝලය නිල් පාට එකක් නම්, එය ප්‍රතිස්ථාපනය නොකර වෙනත් කොළ පාට බෝල 2 ක් පෙට්ටියට එකතු කරනු ලැබේ. දැන්, සසම්භාවී ලෙස දෙවන බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගන්නා ලද බෝල දෙකම කොළ පාට ඒවා වීමේ.

G_1 : ඉවතට ගනු ලැබූ පළමු බෝලය කොළ පාට වීම.

G_2 : ඉවතට ගනු ලැබූ පළමු බෝලය නිල් පාට වීම.

G_3 : ඉවතට ගනු ලැබූ දෙවන බෝලය කොළ පාට වීම.

G_4 : ඉවතට ගනු ලැබූ දෙවන බෝලය නිල් පාට වීම.

$P(G_1) = \frac{3}{5}$ (5) හා $P(B_1) = \frac{2}{5}$, (5)

$P(G_2\backslash(G_1) = \frac{2}{6}$, (5) $P(G_2\backslash(B_1) = \frac{5}{6}$,

$P(B_2\backslash(G_1) = \frac{4}{6}$, $P(B_2\backslash(B_1) = \frac{1}{6}$, (5)

(i) $P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)\ P(G_2\backslash(G_1)$ (10)

(5) $= \frac{3}{5} \times \frac{2}{6}$ (5)

$= \frac{1}{5}$ (5)

25

(ii) අඩුම තරමින් ඉවතට ගන්නා ලද එක බෝලයක්වත් කොළ පාට එකක් වීමේ.

$P(G_1 \cup G_2) = 1 - P(B_1 \cap B_2)$ (10)

(5) $= 1 - P(B_1)\ P(B_2\backslash(B_1)$ (10)

$= 1 - \frac{2}{5} \times \frac{1}{6}$ (5)

$= \frac{14}{15}$ (5)

35

(iii) ඉවතට ගන්නා ලද එක බෝලයක් කොළ පාට එකක් බව දී ඇති විට, ඉවතට ගත් බෝල දෙකම කොළ පාට ඒවා වීමේ,

$$P(G_1 \cap G_2 \setminus G_1 \cup G_2) = \frac{P(G_1 \cap G_2)}{P(G_1 \cup G_2)} \quad \text{(10)}$$

$$\text{(10)} \qquad = \frac{1/5}{14/15} \quad \text{(5)}$$

$$= 3/14 \quad \text{(5)}$$

30

(iv) ඉවතට ගත් බෝල වෙනස් වර්ණවල ඒවා වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

P(දෙක වෙනස් පාට වලින් වීම) = 1 – P (දෙකම එකම පාටින් වීම) (10)

$$= 1 - P((G_1 \cap G_2) \cup (B_1 \cap B_2)) \quad \text{(10)}$$

$$= 1 - P(G_1 \cap G_2) - P(B_1 \cap B_2) \quad \text{(10)}$$

$$= 1 - 1/5 - 1/15 \quad \text{(5)}$$

$$= 11/15 \quad \text{(5)}$$

40

---

15. Y සන්තතික සසම්භාවී විචල්‍යයක්,

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad \text{එසේ නොවන විට} \end{cases}$$

මගින් දෙනු ලබන $f(y)$ සම්භාවිතා ඝනත්ව ශ්‍රිතයක් සහිත ඝාතීය ව්‍යාප්තියක් අනුගමනය කරයි; මෙහි $\lambda > 0$ පරාමිතියකි.

Y හි මධ්‍යන්‍යය, විචලතාව හා සමූහිත ඝනත්ව ශ්‍රිතය සොයන්න.

රෝගියකුට ප්‍රතිකාර කිරීමට වෛද්‍යවරයකුට ගතවන කාලය, මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 10 ක් වූ ඝාතීය ව්‍යාප්තියක් යැයි ගනිමු. පහත එක එකක් සොයන්න. (පිළිතුරු සුළු කිරීම අවශ්‍ය නැත)

(i) වෛද්‍යවරයා රෝගියකුට ප්‍රතිකාර කිරීමට ගන්නා කාලයේ 50 වන ප්‍රතිශතකය

$$f(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & ; y > 0 \\ 0 \quad ; \text{ අනෙක් විට} & ; \lambda > 0 \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_0^\infty y\,\lambda\,e^{-\lambda y}\,dy \quad (10)$$

$$= \left[-y\,e^{-\lambda y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= 0 + \left[\frac{e^{-\lambda y}}{-\lambda}\right]_0^\infty$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{-\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

15

$$V(Y) = E(Y^2) - [\,E(Y)\,]^2$$

$$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2\,\lambda\,e^{-\lambda y}\,dy \quad (10)$$

$$= \left[y^2\,e^{-\lambda y}\right]_\infty^0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty y\,e^{-\lambda y}\,dy$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(Y^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (5)$$

15

$P(Y \leq y) = \int_0^y f(u)\ du$ (10)

$= \int_0^y \lambda\, e^{-\lambda u}\ du$

$= \left[\, e^{-\lambda u}\right]_y^0$ (5)

$= 1 - e^{-\lambda y}$ (5)

20

Y යනු වෛද්‍යවරයෙකු රෝගියෙකුට ප්‍රතිකාර කිරීමට ගන්නා කාලය යැයි ගනිමු.

$Y \sim Exp(\lambda)$

$E(Y) = 10 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda} = 10 \qquad \therefore \lambda = 0.1$ (10)

(i). 50 වෙනි ප්‍රතිශතකය α යැයි ගනිමු.

එවිට $P(Y \leq \alpha) = 0.5$ (10)

$\therefore 1 - e^{-\lambda\alpha} = 0.5$ (5)

එනම්, $e^{-\lambda\alpha} = \frac{1}{2}$

$\lambda\alpha = \ln 2$

$\therefore \quad \alpha = 10 \ln 2 \quad (\because \lambda = 0.1)$ (10)

35

(ii) රෝගියකුට ප්‍රතිකාර කිරීමට වෛද්‍යවරයා මිනිත්තු 8 කට වඩා ගන්නා සම්භාවිතාව

$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8)$ (10)

$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda 8}\right)$ (10)

$= e^{-0.8}$ (5)

25

(iii) වෛද්‍යවරයා දැනටමත් රෝගියකුට ප්‍රතිකාර කිරීමට මිනිත්තු 10 කට වඩා ගතකර ඇත්නම්, ඔහු මිනිත්තු 15 කට අඩු කාලයකදී මෙම රෝගියාට ප්‍රතිකාර කර අවසන් කරන සම්භාවිතාව

$P(Y < 15 \mid Y > 10)$

$$= \frac{P(10 < Y < 15)}{P(Y > 10)} \quad \textcircled{10}$$

$$= P(Y < 15) - P(Y < 10)$$

$$= (1 - e^{-1.5}) - (1 - e^{-1})$$

$$= (e^{-1} - e^{-1.5}) \quad \textcircled{10}$$

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10)$$

$$= 1 - (1 - e^{-1})$$

$$= e^{-1} \quad \textcircled{10}$$

$$\therefore \quad P(Y < 15 \mid Y > 10) = \frac{e^{-1} - e^{-1.5}}{e^{-1}} \quad \textcircled{10}$$

40

---

16. (*a*) මසක් ඇතුළත පන්තියකට නොපැමිණි සිසුන් ගණනෙහි සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තිය පහත වගුවෙන් දෙනු ලබයි.

නොපැමිණි සිසුන් ගණන	දවස් ගණන
1 – 3	15
4 – 6	12
7 – 9	10
10 – 12	5
13 – 15	2

මෙම ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මාතය හා මධ්‍යස්ථය නිමානය කරන්න.

(5) (5) (5)

මධ්‍ය අගය (m_i)	f_i	F_i	$f_i m_i$
2	15 (5)	15	30
5	12	27 (5)	60
8	10	37	80
11	5	42	55
14	2	44	28
			253

මධ්‍යන්‍යය $= \frac{\sum f_i m_i}{\sum f_i}$

$= \frac{253}{44}$ (10)

$= 5.75$ (5)

මධ්‍යස්ථය $= L_1 + d\left(\frac{\frac{\sum f_i}{2} - F}{f_{M\alpha}}\right)$

(5) $= 4 + 2\left(\frac{44/2 - 15}{12}\right)$ (10)

$= 4 + \frac{7}{6}$

$= 5.17$ (5)

මාතය $= L_1 + d\left(\frac{f_1}{f_1+f_2}\right)$

$= 1 + \left(\frac{15}{15+3}\right)$ (10)

$= 2.67$

70

(b) කරනවැමියකු පාරිභෝගිකයකුගේ කොණ්ඩය කැපීමට ගතකරන කාලය මධ්‍යන්‍යය මිනිත්තු 20 ක් හා සම්මත අපගමනය මිනිත්තු 5 ක් ලෙස ප්‍රමතව ව්‍යාප්ත වේ.

(i) කරනවැමියා පාරිභෝගිකයකුගේ කොණ්ඩය කැපීමට

(a) මිනිත්තු 25 කට වඩා,

(b) මිනිත්තු 25 ත් 30 ත් අතර කාලයක්,

ගැනීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ඔහු පාරිභෝගිකයන් 5 දෙනෙකුට පැය 2 කට (මිනිත්තු 120 කට) වඩා අඩු කාලයකදී සේවය සැපයීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

X යනු කරනවැමියාට කොණ්ඩය කැපීමට ගතවන කාලය යයි ගනිමු.

$X \sim N(20, 5^2)$

$P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25)$ (5)

$= 1 - P\left(Z \leq \frac{25-20}{5}\right)$ (5)

$= 1 - P(Z \leq 1)$

$= 1 - (0.5 + 0.0398)$ (10)

$= 0.4602$ (5)

$P(25 < X < 30) = P(X < 30) - P(X < 25)$ (5)

$= P(Z < 2) - P(Z < 1)$ (5)

$= (0.5 + 0.0793) - (0.5 + 0.0398)$ (10)

$= 0.0395$ (5)

Y යනු කරනවැමියාට 5 දෙනෙකුගේ කොණ්ඩය කැපීමට ගතවන කාලය යැයි ගනිමු.

$Y \sim N(100, 25^2)$ (10)

$$P(Y < 120) = P\left(Z < \frac{120-100}{25}\right)$$ (5)

$$= P(Z < 0.8)$$

$$= 0.2881$$ (5)

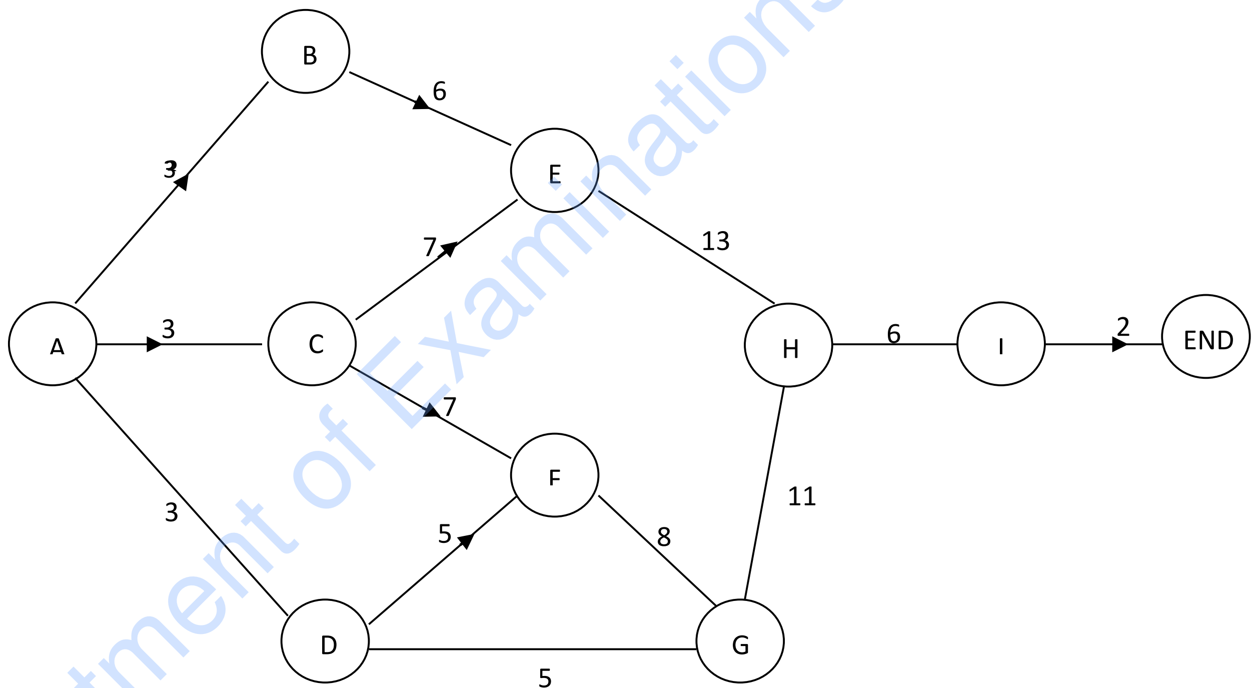
70

---

17. ව්‍යාපෘතියක ක්‍රියාකාරකම් සඳහා ගතවන කාලය හා ක්‍රියාකාරකම්වල ගැලීම් පහත වගුවෙන් දී ඇත:

ක්‍රියාකාරකම	පූර්ව ක්‍රියාකාරකම (ක්‍රියාකාරකම්)	කාලය (මාසවලින්)
A	–	3
B	A	6
C	A	7
D	A	5
E	B, C	13
F	C, D	8
G	D, F	11
H	G, E	6
I	H	2

(i) ව්‍යාපෘති ජාලය ගොඩනගන්න.



50

(ii) එක් එක් ක්‍රියාකාරකම සඳහා ආරම්භ කළ හැකි ඉක්මන්ම වේලාව, අවසන් කළ හැකි ඉක්මන්ම වේලාව, ආරම්භ කළ හැකි ප්‍රමාදම වේලාව, අවසන් කළ හැකි ප්‍රමාදම වේලාව හා ඉපිලුම ඇතුළත් කාර්ය සටහනක් සකස් කරන්න.

ක්‍රියාකාරකම	ES	EF	LS	LE	ඉපිලුම
(A)	0	$0+3=3$	$3-3=0$	3	0
B	3	$3+6=9$	$16-3=13$	16	7
(C)	3	$3+7=10$	$10-7=3$	10	0
D	3	$3+5=8$	$10-5=5$	10	2
E	10	$10+13$ $=23$	$29-13$ $=16$	29	6
(F)	10	$10+8=18$	$18-8=10$	18	0
(G)	18	$18+11$ $=29$	$29-11$ $=18$	29	0
(H)	29	$29+6=35$	$35-6=29$	35	0
(I)	35	$35+2=37$	$37-2=35$	37	0

50

(iii) ව්‍යාපෘතිය සඳහා ගතවන මුළු කාලය සොයන්න.

ව්‍යාපෘතිය සඳහා ගත වන මුළු කාලය = මාස 37 (**10**)

10

(iv) ව්‍යාපෘතිය සඳහා අවධි පථය ලියා දක්වන්න.

A, C, F, G, H, I (**10**)

10

(v) ව්‍යාපෘතිය සඳහා ගතවන මුළු කාලය දීර්ඝ නොකර, පමා කළ හැකි ක්‍රියාකාරකම් මොනවා ද?

B, D හා E **10**

10

(vi) ව්‍යාපෘතියේ නිමා කාලයට පහත එක එකක් කෙසේ බලපායි ද?

(a) F ක්‍රියාකාරකම මාස 2 කින් ප්‍රමාද කිරීම.

F අවධි පථය මත වේ. F මාස 2කින් පමා වුව හොත් මුළු ව්‍යාපෘතියම මාස 2කින් පමා වේ.

10 **10**

(b) E ක්‍රියාකාරකම මාස 1 කින් ප්‍රමාද කිරීම.

ව්‍යාපෘතිය නිම කිරීමට ගත වන කාලයට බාධාවක් නොවන පරිද්දෙන් E ක්‍රියාකාරකම මාස 6කින් පමා කල හැක. එබැවින් ක්‍රියාකාරකම මාස 1 කින් පමා කිරීරීමෙන් ව්‍යාපෘතිය නිම කිරීමට ගත වන කාලයට බලපෑමක් සිදු නොවේ.

10

10
